Fuzzy AHP
Fuzzy TOPSIS
Hierarchical Fuzzy TOPSIS

زهرا حجازی زاده

(دانشجوی ارشد صنایع – صنایع)

Z_tat224@yahoo.com

۱ . مقدمه

تصمیم گیری یکی از اساسی ترین موضوعاتی است که همواره بشر، حتی در زندگی روزمره خود با آن روبرو است . برای انجام یک کار خاص، ممکن است ما با گزینه های مختلفی مواجه باشیم که از بین آن ها باید بهترین گزینه را انتخاب نماییم . در واقع تصمیم گیری، به چگونگی انتخاب بهترین گزینه از میان گزینه های ممکن می پردازد به طوری که گزینه ی منتخب بتواند بیشترین سود و موفقیت را به همراه داشته باشد .

تئوری مجموعه های فازی اولین بارتوسط *Zadeh* در سال ۱۹۶۵، مطرح گردید. *Zadeh* با این تئوری، عدم قطعیت ناشی از ابهاماتِ تفکرات انسان را بیان نمود که اصلی ترین حسن این تئوری، توانایی ارائه ی داده های است که غیر قطعی هستند . همچنین این روش قادر به بکارگیری عملگرهای ریاضی در حوزه ی این داده ها نیز هست .

کاربرد مجموعه های فازی در مسائل تصمیم گیری یکی از مهم ترین و کارآمدترین کاربردهای این تئوری در مقایسه با تئوری مجموعه های کلاسیک می باشد . در واقع تئوری تصمیم گیری فازی، تلاش می کند که ابهام و عدم قطعیت های ذاتی موجود در ترجیحات، اهداف و محدودیت های موجود در مسائل تصمیم گیری را مدل می کند .

در این تحقیق، دو تکنیکِ تصمیم گیری چند شاخصه ی *AHP*[1] و *TOPSIS*[2] مورد بررسی قرار می گیرد . در بخش ۲، تکنیک *AHP* کلاسیک و فازی تشریح می گردد و یک مثال عددی توسط به کارگیری این روش ارائه می گردد . در بخش ۳ ، تکنیک *TOPSIS* کلاسیک و فازی مورد بررسی قرار می گیرد و

---

[1] . Analytic Hierarchy Process

[2] . Technique for Odrer-Preference by Similarity to Ideal Solution

یک مثال عددی نیز توسط به کارگیری این روش ارائه می شود .در بخش ۴و۵، جهت" ***ارزیابی عملکرد هیئت علمی یک دانشگاه در ترکیه*** "، این دو روش به کارگرفته می شود و بدین منظور روش جدیدِ TOPSIS فازی ِ سلسله مراتبی[1]، ارائه می گردد . و در نهایت مقایسه ای بین این دو روش انجام می شود.

۲ . روشAHP

۲.۱ . AHP کلاسیک

روش فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) اولین بار توسط ساعتی[2] ارائه گردید . این روش بر پایه مقایسات زوجی استوار می باشد . مدل سازی این روش شامل گام های زیر می باشد[3] :

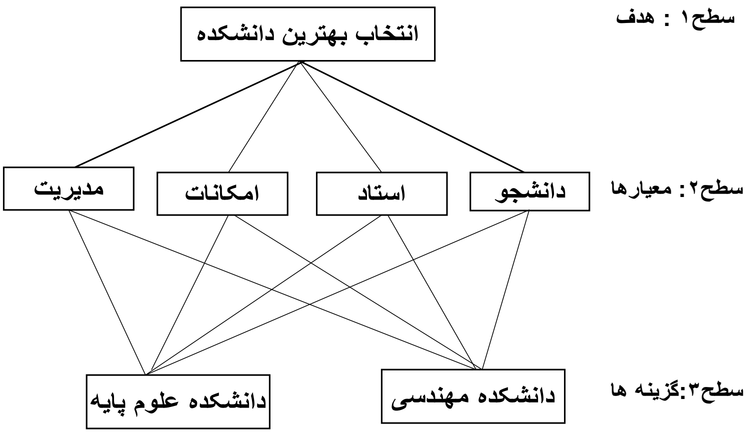
گام ۱ . ساختن یک سلسله مراتبی برای مساله

گام ۲ . تعیین ماتریس های مقایسه ی زوجی و اعمال قضاوت ها

گام ۳. محاسبه ی وزن های نسبی معیارها و گزینه ها و وزن های نهایی گزینه ها

گام ۴ . بررسی سازگاری سیستم

برای درک بهتر یک مساله ی AHP ابتدا لازم است سطوح مختلف آن و ارتباط بین اجزای تشکیل دهنده هر سطح با سطح بالاتر به صورت گرافیکی مشخص گردد . در واقع به این کار، ساختن سلسله مراتبی گفته می شود . شکل ۱ به صورت شماتیک ساختار سلسله مراتبی انتخاب بهترین دانشکده ی یک دانشگاه[5] را که دارای سه سطح می باشد، نشان می دهد .



شکل ۱ . ساختار سلسله مراتبی انتخاب بهترین دانشکده ی یک دانشگاه

همانطور که در شکل ۱ مشاهده می گردد، سطح اول مربوط به هدف، سطح دوم مربوط به معیارهای مورد نظر برای اولویت بندی گزینه ها و سطح سوم نشان دهنده گزینه های مورد بررسی می باشد . پس از مشخص نمودن ساختار سلسله مراتبی ، باید ماتریس های مقایسه زوجی بر اساس نظر شخص تصمیم گیرنده

---

[1] .Hierarchical Fazzy TOPSIS Method

[2] .Saaty

تعیین گردد . این کار برای المان های هر سطح به صورت جداگانه انجام می گیرد . در شکل ۱، ماتریس های مقایسه زوجی زیر باید تعیین گردد :

ماتریس های مقایسه زوجی گزینه ها نسبت به هر یک از معیارها :

- ماتریس مقایسه زوجی گزینه ها نسبت به معیار " استاد"
- ماتریس مقایسه زوجی گزینه ها نسبت به معیار " امکانات"
- ماتریس مقایسه زوجی گزینه ها نسبت به معیار" دانشجو"
- ماتریس مقایسه زوجی گزینه ها نسبت به معیار "مدیریت "

ماتریس مقایسه زوجی معیارها نسبت به هدف .

به طور کلی اگر تعداد گزینه ها و معیارها به ترتیب برابر m و n باشد آنگاه ماتریس های مقایسه زوجی گزینه ها به صورت $m*m$ و ماتریس مقایسه زوجی معیارها یک ماتریس $n*n$ خواهد بود . المان های ماتریس مقایسه زوجی را با a_{ij} نشان می دهند که مبین میزان ارجحیت یا اهمیت نسبی عنصر i ام بر عنصر j ام است . و رابطه $a_{ij} = 1/a_{ji}$ در تمام ماتریس ها وجود دارد . بنابراین واضح است در صورتی که $i = j$ باشد آنگاه $a_{ij} = 1$ خواهد بود . a_{ij} ها بر اساس پیشنهاد آقای ساعتی از جدول ۱ انتخاب می گردند.

جدول ۱. مقادیر عددی ارجحیت ها در مقایسات زوجی

عبارت زبانی برای تعیین ارجحیت	**مقدار عددی**
ارجحیت یا اهمیت کامل و مطلق	۹
ارجحیت یا اهمیت خیلی قوی	۷
ارجحیت یا اهمیت قوی	۵
ارجحیت یا اهمیت کم	۳
ارجحیت یا اهمیت برابر	۱
برای ترجیحات بین عبارت های زبانی فوق	۲و۴و۶و۸

مرحله بعدی، محاسبه وزن های نسبی و درنهایت وزن های نهایی است . برای به دست آوردن وزن های نسبی، چهار روش عمده مطرح می گردد[4] که عبارتند از :

- روش حداقل مربعات[1]
- روش حداقل مربعات لگاریتمی[2]
- روش بردار ویژه[3]
- روش تقریبی[4]

---

[1] . Least Squares Method

[2] . Logarithmic Least Sqguares Method

[3] . Eigenvector Method

[4] . Aproximation Methods

از آنجایی که روش های فوق دارای محاسبات سنگین می باشد، برخی روش های تقریبی پیشنهاد شده است که دقت کمتری داشته، اما قابل قبول هستند و محاسبات کمتر و ساده تری دارند . این روش ها عمدتاً تقریبی از روش بردار ویژه هستند که با دقت های مختلف محاسبات را تسهیل می نمایند . عمده ی این روش ها عبارتند از[1] [4]:

- مجموع سطری . در این روش ابتدا مجموع عناصر هر سطر محاسبه شده تا بردار ستونی حاصل گردد، سپس این بردار ستونی نرمالیزه می شود . بردار ستونی نرمالیزه شده بردار وزن می باشد .
- مجموع ستونی . در این روش ابتدا مجموع عناصر هر ستون محاسبه شده تا یک بردار سطری حاصل گردد، عناصر این بردار معکوس گشته، سپس بردار نرمالیزه می شود . بردار سطری نرمالیزه شده بردار وزن می باشد .
- میانگین حسابی . در این روش ابتدا هر ستون نرمالیزه شده و سپس میانگین سطری عناصر محاسبه می شوند تا بردار وزن بدست آید .
- میانگین هندسی . در این روش میانگین هندسی عناصر هر سطر محاسبه شده و سپس بردار حاصل نرمالیزه می شود تا بردار وزن به دست آید .

بنابراین با یکی از روش های مذکور، وزن های نسبی در هر سطح برای اجزای مختلف آن سطح و با در نظر گرفتن المان های سطح بالاتر محاسبه می گردد . سپس وزن نهایی هر گزینه با تلفیق وزن های نسبی بدست می آید . و اولویت بندی گزینه ها با توجه به وزن نهایی آن ها انجام می گیرد .

در نهایت میزان سازگاری سیستم محاسبه می گردد .فرض کنید n معیار به صورت $c_1, c_2, ..., c_n$ داریم که ماتریس مقایسه زوجی آن ها به شکل زیر می باشد :

$$A = [a_{ij}] \quad where \quad i, j = 1,2,...,n$$

به طوریکه a_{ij} نشاندهنده ی میزان ارجحیت یا اهمیت نسبی عنصر i ام بر عنصر j ام است . حال چنانچه در این ماتریس رابطه زیر برقرار باشد آنگاه می گوییم که ماتریس A سازگار است .

$$a_{ik}.a_{kj} = a_{ij} \quad where \quad i, j, k, = 1,2,...,n$$

چنانچه ماتریس مقایسه زوجی سازگار نباشد، باید نرخ ناسازگاری سیستم را محاسبه نموده و در صورتی که این نرخ از یک مقدار قابل قبول، کمتر باشد آنگاه سازگاری سیستم قابل قبول خواهد بود در غیر این صورت شخص تصمیم گیرنده باید در قضاوت های خود تجدید نظر نماید .

۲. ۲ . AHP فازی

به طوری که در بالا مشاهده شد، مفهوم فازی بودن در روش AHP کلاسیک، به صورت غیر مستقیم و بدون استفاده از مجموعه های فازی مورد توجه قرار گرفته است . در واقع در این روش با استفاده از عبارت های زبانی در جدول ۱، مفهوم فازی بودن در تعیین ماتریس های مقایسه زوجی دخالت داده می شود . بنابراین با تعمیم روش فوق، روش هایی ارائه می گردد که در آن ها از اعداد فازی برای بیان میزان

---

[1] . Saaty(1990)

ارجحیت المان ها استفاده می گردد . در این میان می توان به روش های ارائه شده توسط *Buckley(1985)* ، *Laarhoven & Pedrych(1983)* ، *Chang(1992)* و ... اشاره نمود . همچنین بررسی وسیعی در ارتباط با این تکنیک ها را می توان در آثار *Kahraman(2004)* مشاهده نمود .

در این تحقیق، *AHP* فازی به روش آنالیز توسعه ی *Chang* ، تشریح می گردد[1] زیرا این روش از سایر روش های *AHP* فازی ساده تر بوده و در ضمن مشابه با روش *AHP* کلاسیک است .

قبل شروع الگوریتم *AHP* فازی به روش آنالیز توسعه ی*Chang*، به توضیح روش آنالیز توسعه ی*Chang* می پردازیم .

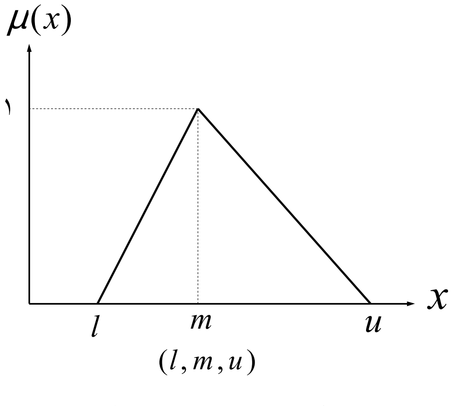
۱ .۲ .۲ . روش آنالیز توسعه ی**Chang** [1]

چنانچه $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ مجموعه اهداف و $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ مجموعه آرمان ها باشد، آنگاه بر طبق روش آنالیز توسعه ی*Chang*، با در نظر گرفتن هر هدف، آنالیز توسعه را می توان برای هر یک از آرمان ها (g_i) ، انجام داد . بنابراین می توان به صورت زیر، *m* مقدار آنالیز توسعه برای هر هدف داشت :

$$M_{g_i}^1, M_{g_i}^2, ..., M_{g_i}^m \qquad where \qquad i = 1,2,...,n$$

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & \text{آرمان ۱} & \text{آرمان ۲} & \cdots & \text{آرمان m} \\
\text{هدف ۱} & M_{g_1}^1 & M_{g_1}^2 & \cdots & M_{g_1}^m \\
\text{هدف۲} & M_{g_2}^1 & M_{g_2}^2 & \cdots & M_{g_2}^m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{هدف n} & M_{g_n}^1 & M_{g_n}^2 & \cdots & M_{g_n}^m
\end{array}$$

که تمام $M_{g_i}^j$ ها عدد فازی مثلثی[1] هستند که به صورت (l,m,u) بیان می گردند . شکل ۲ ، یک عدد فازی مثلثی را نشان می دهد .



شکل۲. نمایش عدد فازی مثلثی

---

[1] Triangular.

حال می توان مراحل آنالیز توسعه ی *Chang* را به صورت زیر بیان نمود :

مرحله ۱ . بدست آوردن بسط مرکب فازی برای هر هدف .

اگر $M_{g_i}^1, M_{g_i}^2, ..., M_{g_i}^m$ ، مقادیر آنالیز توسعه i امین هدف به ازای m آرمان باشد، آنگاه بسط مرکب فازی m آرمان برای i امین هدف، به صورت زیر تعریف می گردد :

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j} \otimes [\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j}]^{-1}$$

چنانچه $M_{g_i}^{j} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij})$ باشد، آنگاه $\sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j}$ بوسیله ی عملگر جمع فازی روی آنالیز توسعه ی m آرمان، بصورت زیر تعریف می گردد :

$$\sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j} = (l_{i1}, m_{i1}, u_{i1}) \oplus (l_{i2}, m_{i2}, u_{i2}) \oplus \cdots \oplus (l_{im}, m_{im}, u_{im})$$

$$= (\sum_{j=1}^{m} l_{ij}, \sum_{j=1}^{m} m_{ij}, \sum_{j=1}^{m} u_{ij}) = (l'_i, m'_i, u'_i)$$

همچنین برای بدست آوردن $[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j}]^{-1}$ ، با اعمال عملگر جمع فازی، خواهیم داشت :

$$\sum\sum M_{g_i}^{j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} l_{ij}, \sum_{j=1}^{m} m_{ij}, \sum_{j=1}^{m} u_{ij} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} l'_i, \sum_{i=1}^{n} m'_i, \sum_{i=1}^{n} u'_i \right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j} \right)^{-1} = (\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} u'_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m'_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} l'_i})$$

بنابراین ؛

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j} \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{g_i}^{j} \right)^{-1}$$

$$= (l'_i, m'_i, u'_i) \otimes (\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} u'_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m'_i}, \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} l'_i}) = (\frac{l'_i}{\sum_{i=1}^{n} u'_i}, \frac{m'_i}{\sum_{i=1}^{n} m'_i}, \frac{u'_i}{\sum_{i=1}^{n} l'_i}) = (l_i, m_i, u_i)$$

مرحله ۲ . محاسبه درجه ارجحیت(درجه امکان پذیری) S_i بر S_k .

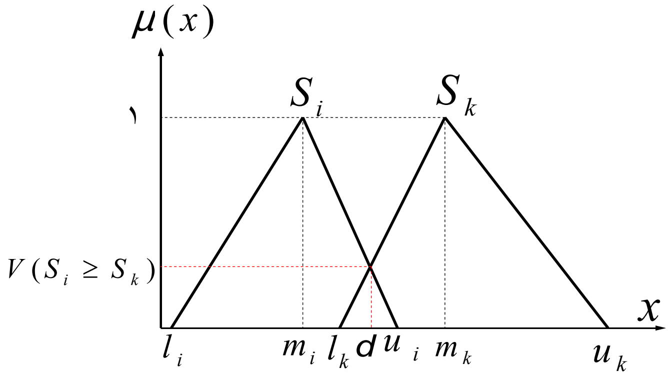
چنانچه $S_i = (l_i, m_i, u_i)$ و $S_k = (l_k, m_k, u_k)$ باشد، آنگاه درجه ارجحیت S_i بر S_k که با $V(S_i \geq S_k)$ نمایش داده می شود، بصورت زیر تعریف می گردد :

$$V(S_i \geq S_k) = \underset{x \geq y}{SUP} (\min\{ \mu_{S_i}(x), \mu_{S_k}(y) \})$$

که برای اعداد فازی مثلثی معادل با رابطه زیر است :

$$V(S_i \ge S_k) = \mu_{S_i}(d) = \begin{cases} 1 & if\,(m_i \ge m_k) \\ 1 & if\,(l_k \ge u_i) \\ \dfrac{l_k - u_i}{(m_i - u_i) - (m_k - l_k)} & otherwise \end{cases}$$

که *d* متناظر با بزرگترین نقطه ی تقاطع بین μ_{S_i}, μ_{S_k} است . شکل ۳، $V(S_i \ge S_k)$را نشان می دهد .



شکل ۳ . نقطه تقاطع بین μ_{S_i}, μ_{S_k}

مرحله ۳ . محاسبه درجه ارجحیت (درجه امکانپذیری) یک عدد فازی محدب *S* که بزرگتر از *k* عدد فازی محدبِ $S_i; i = 1,2,...,k$ باشد، به صورت زیر تعریف می گردد :

$$\begin{aligned} V(S \ge S_1, S_2,..., S_k) &= V\big((S \ge S_1),(S \ge S_2),...,(S \ge S_k)\big) \\ &= \min\big(V(S \ge S_1), V(S \ge S_2),..., V(S \ge S_k)\big) \\ &= \min V(S \ge S_i) \qquad i = 1,2,,,,k \end{aligned}$$

چنانچه فرض کنیم که $d'(A_i) = \min V(S_i \ge S_k) \qquad for(k = 1,2,...,n \quad k \ne i)$ ، آنگاه بردار وزن به صورت زیر بدست می آید :

$$W' = \big(d'(A_1), d'(A_2),..., d'(A_n)\big)$$

قابل ذکر است که وزن های بدست آمده، غیر فازی هستند .

مرحله ۴ . نرمالیزه کردن بردار W''و بدست آوردن بردار وزن نرمالیزه شده ی *W* .

$$W = \big(d(A_1), d(A_2),..., d(A_n)\big)$$

۲ .۲ .۲ . الگوریتم AHP فازی به روشِ آنالیز توسعه ی Chang

مراحل کلی الگوریتم *AHP* فازی به روش آنالیز توسعه ی*Chang*، به صورت زیر است :

گام ۱ . ساختن یک سلسله مراتبی برای مساله .

گام ۲ . تعیین ماتریس های مقایسه ی زوجی و اعمال قضاوت ها . در حالت کلاسیک(قطعی)، برای اعمال قضاوت ها، از جدول ۱ استفاده می شود بدین معنی که عدد متناظر با ارجحیت های زبانی درماتریس های مقایسات زوجی وارد می شود . ولی در حالت فازی، مقدارِ متناظر با ارجحیت های زبانی را با اعداد فازی

مثلثی، در ماتریس های مقایسات زوجی وارد می کنیم . بدین منظور می توان از جدول ۲ استفاده نمود [1]. این اعداد فازی ارائه شده با مقیاس های زبانی معمولی ۱تا ۹ ، برابر نیستند ولی برای *AHP* فازی مناسب بوده و مورد استفاده قرار می گیرد .

قابل ذکر است که تمامی عناصر روی قطر اصلی ماتریس های مقایسه زوجی برابر با $(1,1,1)$ هستند و در ضمن ، چنانچه المان سطر*i*ام و ستون *j*ام ماتریس مقایسه زوجی برابر با $M_{g_i}^{j} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij})$ باشد آنگاه عنصرسطر*j*ام و ستون*i*ام این ماتریس برابر است با :

$$M_{g_j}^{i} = (M_{g_i}^{j})^{-1} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij})^{-1} = (\frac{1}{u_{ij}}, \frac{1}{m_{ij}}, \frac{1}{l_{ij}})$$

جدول ۲. اعداد فازی متناظر با ارجحیت ها در مقایسات زوجی

عبارت زبانی برای تعیین ارجحیت	**عدد فازی مثلثی**
ارجحیت یا اهمیت کامل و مطلق	$(\frac{5}{2},3,\frac{7}{2})$
ارجحیت یا اهمیت خیلی قوی تر	$(2,\frac{5}{2},3)$
ارجحیت یا اهمیت قوی تر	$(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2})$
ارجحیت یا اهمیت کم	$(1,\frac{3}{2},2)$
ارجحیت یا اهمیت تقریباً برابر	$(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$
ارجحیت یا اهمیت دقیقاً برابر	(۱و۱و۱)

گام ۳. محاسبه ی وزن های نسبی معیارها و گزینه ها . برای محاسبه وزن نسبی گزینه ها نسبت به هر یک از معیار و وزن نسبی معیارها نسبت به هدف، روش آنالیز توسعه ی*Chang* را برای هر یک از ماتریس های مقایسه زوجی به کار می بریم بنابراین به ازای هر ماتریس، یک بردار وزن نسبی متناظر با آن ماتریس، بدست می آید .

گام ۴ . محاسبه وزن نهایی گزینه ها . وزن نهایی گزینه ها از تلفیق وزن های نسبی بدست می آید .

۲.۳ . بررسی یک مثال عددی

هدف، انتخاب دانشکده برتر از بین دو دانشکده ی علوم پایه و مهندسی، با توجه به سطح کیفی آن ها است. با این فرض که کیفیت دانشکده ها از کیفیتِ چهار عامل، ناشی می شوند که این چهار عامل عبارتند از : دانشجو، استاد، امکانات، و مدیریت [1] .

گام ۱ . ساختن یک سلسله مراتبی برای مساله :

سلسله مراتبی این مساله در شکل۱ نمایش داده شده است .

گام ۲ . تعیین ماتریس های مقایسه ی زوجی و اعمال قضاوت ها :

ماتریس مقایسه زوجی معیارها نسبت به هدف در شکل۴ و ماتریس های مقایسه زوجی گزینه ها نسبت به هر یک از معیارها، در شکل ۵ نشان داده شده است .

Q=

مدیریت	امکانات	استاد	دانشجو	هدف
$(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3})$	$(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{2}{3},1)$	$(1,1,1)$	دانشجو
$(\frac{2}{3},1,2)$	$(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2})$	$(1,1,1)$	$(1,\frac{3}{2},2)$	استاد
$(\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2})$	$(1,1,1)$	$(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3})$	$(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3})$	امکانات
$(1,1,1)$	$(2,\frac{5}{2},3)$	$(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2})$	مدیریت

شکل۴ . ماتریس مقایسه زوجی معیارها نسبت به هدف

P2=

دانشکده علوم پایه	دانشکده مهندسی	مدیریت
$(\frac{1}{2},\frac{2}{3},1)$	$(1,1,1)$	دانشکده مهندسی
$(1,1,1)$	$(1,\frac{3}{2},2)$	دانشکده علوم پایه

P1=

دانشکده علوم پایه	دانشکده مهندسی	استاد
$(\frac{2}{3},1,2)$	$(1,1,1)$	دانشکده مهندسی
$(1,1,1)$	$(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$	دانشکده علوم پایه

---

[1] . این مساله در [5] ، با استفاده از AHPکلاسیک، حل شده است .

P3=

دانشجو	دانشکده مهندسی	دانشکده علوم پایه
دانشکده مهندسی	$(1,1,1)$	$(1,\frac{3}{2},2)$
دانشکده علوم پایه	$(\frac{1}{2},\frac{2}{3},1)$	$(1,1,1)$

P4=

امکانات	دانشکده مهندسی	دانشکده علوم پایه
دانشکده مهندسی	$(1,1,1)$	$(\frac{2}{3},1,2)$
دانشکده علوم پایه	$(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$	$(1,1,1)$

شکل۵ . ماتریس های مقایسه زوجی گزینه ها نسبت به هر یک از معیارها

گام ۳. محاسبه ی وزن های نسبی معیارها و گزینه ها با استفاده از آنالیز توسعه ی *Chang* :

- **مرحله۱ :**

ماتریس Q :

$$\sum_{j=1}^{4} M_{g_1}^{j} = (1,1,1,) \oplus (\frac{1}{2},\frac{2}{3},1) \oplus (\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}) \oplus (\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{2}) = (3.4,4.17,5.17)$$

$$\sum_{j=1}^{4} M_{g_2}^{j} = (1,\frac{3}{2},2) \oplus (1,1,1) \oplus (\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}) \oplus (\frac{2}{3},1,2) = (4.17,5.5,7.5)$$

$$\sum_{j=1}^{4} M_{g_3}^{j} = (\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}) \oplus (\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{2}{3}) \oplus (1,1,1) \oplus (\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2}) = (2.13,2.4,2.83)$$

$$\sum_{j=1}^{4} M_{g_4}^{j} = (\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}) \oplus (\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}) \oplus (2,\frac{5}{2},3) \oplus (1,1,1) = (5,6.5,8)$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} M_{g_i}^{j} = (3.4,4.17,5.17) \oplus (4.17,5.5,7.5) \oplus (2.13,2.4,2.83) \oplus (5,6.5,8)$$

$$= (14.7,18.57,23.5)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} M_{g_i}^{j}\right)^{-1} = (\frac{1}{23.5},\frac{1}{18.57},\frac{1}{14.7}) = (0.043,0.054,0.068)$$

دانشجو : $S_1 = (3.4,4.17,5.17) \otimes (0.043,0.054,0.068) = (0.146,0.225,0.352)$

استاد : $S_2 = (4.17,5.5,7.5) \otimes (0.043,0.054,0.068) = (0.179,0.297,0.51)$

امکانات : $S_3 = (2.13,2.4,2.83) \otimes (0.043,0.054,0.068) = (0.0916,0.130,0.192)$

مدیریت : $S_4 = (5,6.5,8) \otimes (0.043,0.054,0.068) = (0.215,0.351,0.544)$

و به همین ترتیب برای ٤ ماتذیس مقایسه زوجی *P1,P2,P3,P4* ، مقدار زیر بدست می آیند :

ماتریس *P1* :

مهندسی: $S_1 = (0.301,0.5,0.945)$

علوم پایه: $S_2 = (0.27,0.5,0.788)$

ماتریس *P2* :

مهندسی: $S_1 = (0.3,0.401,0.572)$

علوم پایه: $S_2 = (0.4,0.6,0.858)$

ماتریس *P3* :

مهندسی: $S_1 = (0.4,0.6,0.858)$

علوم پایه: $S_2 = (0.3,0.401,0.572)$

ماتریس *P4* :

مهندسی: $S_1 = (0.301,0.5,0.945)$

علوم پایه: $S_2 = (0.27,0.5,0.788)$

- **مرحله ۲ :**

ماتریس Q :

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = (0.146,0.225,0.352) \\ S_2 = (0.179,0.297,0.51) \end{array}\right\} \Rightarrow V(S_1 \geq S_2) = \frac{0.179 - 0.352}{(0.225 - 0.352) - (0.297 - 0.179)} = 0.706$$

$$V(S_2 \geq S_1) = 1 \qquad V(S_1 \geq S_3) = 1 \qquad V(S_3 \geq S_1) = 0.326 \qquad V(S_1 \geq S_4) = 0.521$$
$$V(S_4 \geq S_1) = 1 \qquad V(S_2 \geq S_3) = 1 \qquad V(S_3 \geq S_2) = 0.072 \qquad V(S_2 \geq S_4) = 0.845$$
$$V(S_4 \geq S_2) = 1 \qquad V(S_3 \geq S_4) = 1$$

ماتریس *P1,P4* *:*

$$V(S_1 \geq S_2) = 1 \qquad V(S_2 \geq S_1) = 1$$

ماتریس *P2* *:*

$$V(S_1 \geq S_2) = 0.464 \qquad V(S_2 \geq S_1) = 1$$

ماتریس *P3* :

$$V(S_1 \geq S_2) = 1 \qquad V(S_2 \geq S_1) = 0.464$$

- **مرحله ۳ :**

ماتریس Q :

$$V(S_1 \geq S_2, S_3, S_4) = \min\big(V(S_1 \geq S_2), V(S_1 \geq S_3), V(S_1 \geq S_4)\big) = 0.521$$
$$V(S_2 \geq S_1, S_3, S_4) = 0.845$$
$$V(S_3 \geq S_2, S_1, S_4) = 0.326$$
$$V(S_4 \geq S_2, S_3, S_1) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$W' = (\overset{student}{0.512}, \overset{profesor}{0.845}, \overset{facility}{0.326}, \overset{managment}{1})$$

$P1:$

$W' = (\overset{enginering}{1.0} , \overset{sciences}{1.0})$

$P2:$

$W' = (\overset{enginering}{0.464} , \overset{sciences}{1.0})$

$P3:$

$W' = (\overset{enginering}{1.0} , \overset{sciences}{0.464})$

$P2:$

$W' = (\overset{enginering}{1.0} , \overset{sciences}{1.0})$

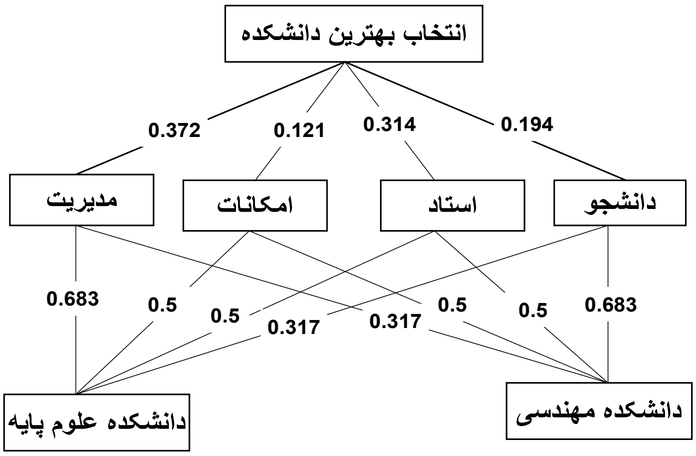
- **مرحله ۴ :**

$$Q \quad \Rightarrow W = (\overset{student}{0.194} ,\overset{profesor}{0.314} , \overset{facility}{0.121} , \overset{managment}{10.372})$$

$$P1 \quad \Rightarrow W = (\overset{enginering}{0.5} , \overset{sciences}{0.5}) \qquad P2 \quad \Rightarrow W = (\overset{enginering}{0.317} , \overset{sciences}{0.683})$$

$$P3 \quad \Rightarrow W = (\overset{enginering}{0.683} , \overset{sciences}{0.317}) \qquad P4 \quad \Rightarrow W = (\overset{enginering}{0.5} , \overset{sciences}{0.5})$$

گام ۴ . محاسبه وزن نهایی گزینه ها :



شکل ٦ . نمایش وزن های نسبی بر روی سلسله مراتبی

وزن نهایی دانشکده مهندسی $= 0.682 * 0.194 + 0.5 * 0.314 + 0.5 * 0.121 + 0.317 * 0.372 = 0.468$

وزن نهایی دانشکده علوم پایه $= 0.317 * 0.194 + 0.5 * 0.314 + 0.5 * 0.121 + 0.683 * 0.372 = 0.532$

بنابراین دانشکده علوم پایه، بهترین دانشکده ی دانشگاه است .

۳. روش *TOPSIS*

۳.۱ . *TOPSIS* کلاسیک

TOPSIS یکی از روش های *MADM* است که *m* گزینه را با توجه به *n* معیار، رتبه بندی می کند . این روش اولین بار توسط *Yoon , Hwang* در سال ۱۹۸۱، معرفی گردید . اساس این روش، انتخاب گزینه ای است که کمترین فاصله را از جواب ایده آل مثبت و بیشترین فاصله را از جواب ایده آل منفی ، دارد .در

روش TOPSIS شاخصی تحت عنوان "نزدیکی نسبیِ گزینه ی *i*ام به راه حل ایده آل $(C_i^+ \quad or \quad C_i^-)$"، معرفی می گردد و گزینه ای که دارای بیشترین C_i^+ است، انتخاب می گردد[1] :

$$C_i^+ = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(w_j.\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^2}-v_j^-)^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(w_j.\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^2}-v_j^+)^2}+\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(w_j.\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^2}-v_j^-)^2}}$$

و یا گزینه ای که دارای کمترین C_i^- است، انتخاب می گردد :

$$C_i^- = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(w_j.\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^2}-v_j^+)^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(w_j.\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^2}-v_j^+)^2}+\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(w_j.\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^2}-v_j^-)^2}}$$

که ***i***مبینِ گزینه ها و ***j***مبینِ شاخص هاست . w_j وزن شاخصِ ***j***ام ، x_{ij} مقدار ارزش شاخص ***i***ام برای گزینه ی ***j***ام ، v_j^+ مقدار ایده آل مثبت برای شاخص ***j***ام (برای شاخص هایی که جنبه ی منفی دارند، حداقل و برای شاخص هایی که جنبه ی مثبت دارند، حداکثر) و v_j^- مقدار ایده آل منفی برای شاخص ***j***ام (برای شاخص هایی که جنبه ی مثبت دارند، حداقل و برای شاخص هایی که جنبه ی منفی دارند، حداکثر) است .

بنابراین مراحل کلی این روش را می توان به صورت زیر بیان نمود[2] :

گام ۱ . تبدیل ماتریس تصمیم گیری موجود، به یک ماتریس " بی مقیاس شده" .

گام ۲ . ایجاد ماتریس " بی مقیاس" وزین با مفروض بودن بردار *W* .به عنوان ورودی الگوریتم .

گام ۳. مشخص نمودن راه حل ایده آل مثبت و ایده آل منفی .

گام۴ . محاسبه اندازه ی فاصله از ایده آل های مثبت و منفی .

گام ۵ . محاسبه ی نزدیکی نسبی گزینه ها به راه حل ایده آل .

گام ۶ . رتبه بندی گزینه ها بر اساس نزدیکی نسبی آن ها به راه حل های ایده آل .

۲.۳ . *TOPSIS* فازی

همان طور که ذکر شد، تفکرات انسان همراه با عدم قطعیت است و این عدم قطعیت در تصمیم گیری تاثیر گذار است . به همین دلیل از روش های تصمیم گیری فازی استفاده می گردد . که یکی از این روش ها ، *TOPSIS* فازی است . در این حالت، عناصر ماتریس تصمیم گیری، یا وزن های شاخص ها نسبت به، و یا هر دوی آن ها به صورت فازی و با اعداد فازی بیان می گردند . روش های متعددی برای *TOPSIS*فازی ارائه شده است . جدول۳[1] تاریخچه ای از این روش ها را نشان می دهد .

از آنجایی که تمام روش های مذکور با تغییر کوچکی در روش *TOPSIS* فازیِ *Chen & Hwang*، بدست آمده اند، در این تحقیق، روش*TOPSIS* فازیِ *Chen & Hwang* ارائه شده[1] و در ادامه به اعداد فازی مثلثی نیز، بسط داده می شود[1] .

جدول ۳ . مقایسه ی روش های *TOPSIS* فازی

روش نرمالیزه کردن	روش رتبه بندی	نوع اعداد فازی	وزن شاخص ها	روش ها
Linear Normalize	*Lee & Li ' s (1988) Generalized mean method*	*Trapezoida*	*Fuzzy numbers*	*Chen & Hwang (1992)*
Manhattan distance	*Chen ' s(1985) Ranking with maximizing set and minimizing set*	*Trapezoida*	*Fuzzy numbers*	*Liang(1999)*
Linear Normalize	*Chen(2000) Assumes the fuzzy positive and negative ideal solutions as(1,1,1)& (0,0,0)respectively*	*Triangular*	*Fuzzy numbers*	*Chen(2000)*
Modified Manhattan distance	*Liou & Wang ' s (1992)ranhing method of total integral value with=1/2*	*Triangular*	*Fuzzy numbers*	*Chu(2002)*
Vector Normalization	*Zhao & Govind' s(1991)center of area method*	*Triangular*	*Crisp Values*	*Tsaur et a l (2002)*
Manhattan distance	*Chen ' s (2000) fuzzy position and negative ideal solution : as (1,1,1) and (0,0,0)*	*Triangular*	*Crisp Values*	*Zhang & Lu (2003)*
Linear Normalize	*Kaufmann & Gupta ' s (1998) mean of the removals method*	*Triangular*	*Fuzzy numbers*	*Chu & Lin (2003)*

مراحل کلی روش فازی *Chen & Hwang* به همراه *TOPSIS* کلاسیک، به صورت زیر ارائه می گردد :

قبل از شروع الگوریتم این روش، باید ماتریس تصمیم *D* که یک ماتریس *m*n* است و بردار وزن شاخص ها نسبت به هدف *W*، به عنوان ورودی الگوریتم، تشکیل گردد :

- در حالت کلاسیک (قطعی) :

$$D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} X_1 & \cdots & X_j & \cdots & X_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$W = (w_1, ..., w_j, ..., w_n);$$

- در حالت فازی :

$$D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} X_1 & \cdots & X_j & \cdots & X_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \cdots & \tilde{x}_{1j} & \cdots & \tilde{x}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{x}_{i1} & \cdots & \tilde{x}_{ij} & \cdots & \tilde{x}_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \cdots & \tilde{x}_{mj} & \cdots & \tilde{x}_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

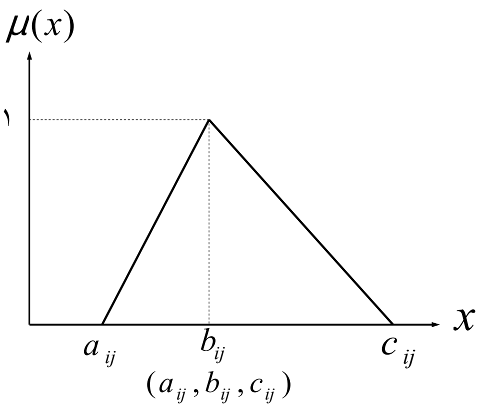
$$\begin{cases} \tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) & \text{اگر به صورت عدد فازی مثلثی باشد} \\ \tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}) & \text{اگر به صورت عدد فازی ذوزنقه ای باشد} \end{cases}$$

$$W = (\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_j, ..., \tilde{w}_n) \quad ; \begin{cases} \tilde{w}_j = (\alpha_j, \beta_j, \chi_j) & \text{اگر به صورت عدد فازی مثلثی باشد} \\ \tilde{w}_j = (\alpha_j, \beta_j, \chi_j, \delta_j) & \text{اگر به صورت عدد فازی ذوزنقه ای باشد} \end{cases}$$

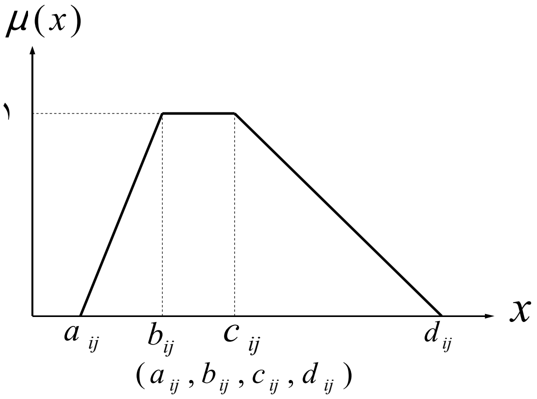
شکل ۷و۸، عدد فازی مثلثی و ذوزنقه ای[۱] را نشان می دهد .

---

[۱] Trapezoidal.



شکل ۷ . عدد فازی مثلثی



شکل ۷ . عدد فازی ذوزنقه ای

گام ۱ . نرمالیزه کردن ماتریس تصمیم . در ابتدا باید ماتریس تصمیم نرمالیزه گردد تا عناصر آن " بی مقیاس " شود . برای نرمالیزاسیون، چندین روش وجود دارد که *Chen & Hwang*، روش نرمالیزه کردنِ خطی را بکار برده اند . بدین منظور باید حداکثر هر ستون x_j^+ و حداقلِ هر ستون x_j^- را مشخص کرده و با استفاده از روابط زیر مقادیرِ r_{ij} را که مقادیر نرمالیزه شده ی x_{ij} هستند، محاسبه کرد :

- در حالت قطعی :

اگر x_{ij} جنبه ی مثبت داشته باشد(مثل سود)آنگاه $r_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j^+}$.

اگر x_{ij} جنبه ی منفی داشته باشد(مثل هزینه)آنگاه $r_{ij} = 1 - \frac{x_{ij}}{x_j^+}$.

در صورتیکه شاخص هایی با جنبه ی مثبت و جنبه ی منفی به طور مخلوط با یکدیگر در نظر گرفته شده باشند، جنبه منفی را با معکوس کردن نتیجه ی آن به جنبه ی مثبت تبدیل می کنیم [2] یعنی $r_{ij} = \frac{x_j^-}{x_{ij}}$ در این صورت رابطه ی کلی r_{ij}، به صورت زیر بیان می گردد :

$$r_{ij} = \begin{cases} \dfrac{x_{ij}}{x_j^+} \quad ; & \text{اگر } x_{ij} \text{ جنبه مثبت داشته باشد} \\ \dfrac{x_j^-}{x_{ij}} \quad ; & \text{اگر } x_{ij} \text{ جنبه منفی داشته باشد} \end{cases}$$

در این صورت ماتریس نرمالیزه شده ی ماتریس *D* به صورت زیر ، حاصل می شود :

$$D' = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} X_1 & \cdots & X_j & \cdots & X_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} r_{11} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{i1} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mj} & \cdots & r_{mn} \end{array} \right] \end{array}$$

- در حالت فازی :

زمانی که x_{ij} ها به صورت فازی هستند (عدد مثلثی : $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ و یا عدد ذوزنقه ای: $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij})$)، مسلماً r_{ij} ها نیز غیر فازی هستند .

اگر اعداد فازی به صورت مثلثی باشند و $\tilde{x}_j^+ = (a_j^+, b_j^+, c_j^+), \tilde{x}_j^- = (a_j^-, b_j^-, c_j^-)$ به ترتیب بیشترین و کمترین امتیازها باشند آنگاه

$$\tilde{r}_{ij} = \begin{cases} \tilde{x}_{ij} (/) \tilde{x}_j^+ = (\dfrac{a_{ij}}{c_j^+}, \dfrac{b_{ij}}{b_j^+}, \dfrac{c_{ij}}{a_j^+}); & \text{اگر } \tilde{x}_{ij} \text{ جنبه مثبت داشته باشد} \\ \tilde{x}_j^- (/) x_{ij} = (\dfrac{a_j^-}{c_{ij}}, \dfrac{b_j^-}{b_{ij}}, \dfrac{c_j^-}{a_{ij}}); & \text{اگر } \tilde{x}_{ii} \text{ جنبه منفی داشته باشد} \end{cases}$$

اگر اعداد فازی به صورت ذوزنقه ای باشند و $\tilde{x}_j^+ = (a_j^+, b_j^+, c_j^+, d_j^+), \tilde{x}_j^- = (a_j^-, b_j^-, c_j^-, d_j^+)$ به ترتیب بیشترین و کمترین امتیازها باشد آنگاه :

$$\tilde{r}_{ij} = \begin{cases} \tilde{x}_{ij} (/) \tilde{x}_j^+ = (\dfrac{a_{ij}}{d_j^+}, \dfrac{b_{ij}}{c_j^+}, \dfrac{c_{ij}}{b_j^+}, \dfrac{d_{ij}}{a_j^+}); & \text{اگر } \tilde{x}_{ij} \text{ جنبه مثبت داشته باشد} \\ \tilde{x}_j^- (/) x_{ij} = (\dfrac{a_j^-}{d_{ij}}, \dfrac{b_j^-}{c_{ij}}, \dfrac{c_j^-}{b_{ij}}, \dfrac{d_j^-}{a_{ij}}); & \text{اگر } \tilde{x}_{ii} \text{ جنبه منفی داشته باشد} \end{cases}$$

در این صورت ماتریس نرمالیزه شده ی *D* به *'D* تبدیل می شود :

$$D' = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} X_1 & \cdots & X_j & \cdots & X_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} \tilde{r}_{11} & \cdots & \tilde{r}_{1j} & \cdots & \tilde{r}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{r}_{i1} & \cdots & \tilde{r}_{ij} & \cdots & \tilde{r}_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{r}_{m1} & \cdots & \tilde{r}_{mj} & \cdots & \tilde{r}_{mn} \end{array} \right] \end{array}$$

گام ۲ . بدست آوردن ماتریس نرمالیزه شده ی وزن دار .

- در حالت قطعی :

عناصر ماتریس نرمالیزه شده ی وزن دار (v_{ij}) با استفاده از رابطه ی زیر بدست می آید :

$$v_{ij} = r_{ij} . w_j$$

بنابراین ماتریس نرمالیزه شده ی وزن دار که با v نشان داده می شود به صورت زیر حاصل می شود :

$$v = \begin{array}{c|ccccc|} & X_1 & \cdots & X_j & \cdots & X_n \\ A_1 & v_{11} & \cdots & v_{1j} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_i & v_{i1} & \cdots & v_{ij} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_m & v_{m1} & \cdots & v_{mj} & \cdots & v_{mn} \end{array}$$

- در حالت فازی :

عناصر ماتریس نرمالیزه شده ی وزن دار ($\tilde{v}_{ij}$) با استفاده از رابطه ی زیر بدست می آید :

برای اعداد فازی مثلثی :

$$\begin{cases} \tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(.)\tilde{w}_j = (\frac{a_{ij}}{c_j^+}, \frac{b_{ij}}{b_j^+}, \frac{c_{ij}}{a_j^+})(.)(\alpha_j, \beta_j, \chi_j) = (\frac{a_{ij}}{c_j^+}.\alpha_j, \frac{b_{ij}}{b_j^+}.\beta_j, \frac{c_{ij}}{a_j^+}.\chi_j) \\ \tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(.)\tilde{w}_j = (\frac{a_j^-}{a_{ij}}, \frac{b_j^-}{b_{ij}}, \frac{c_j^-}{c_{ij}})(.)(\alpha_j, \beta_j, \chi_j) = (\frac{a_j^-}{c_{ij}}.\alpha_j, \frac{b_j^-}{b_{ij}}.\beta_j, \frac{c_j^-}{a_{ij}}.\chi_j) \end{cases}$$

برای اعداد فازی ذوزنقه ای :

$$\begin{cases} \tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(.)\tilde{w}_j = (\frac{a_{ij}}{d_j^+}, \frac{b_{ij}}{c_j^+}, \frac{c_{ij}}{b_j^+}, \frac{d_{ij}}{a_j^+})(.)(\alpha_j, \beta_j, \chi_j, \delta_j) = (\frac{a_{ij}}{d_j^+}.\alpha_j, \frac{b_{ij}}{c_j^+}.\beta_j, \frac{c_{ij}}{b_j^+}.\chi_j, \frac{d_{ij}}{a_j^+}.\delta_j) \\ \tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij}(.)\tilde{w}_j = (\frac{a_j^-}{d_{ij}}, \frac{b_j^-}{c_{ij}}, \frac{c_j^-}{b_{ij}}, \frac{d_j^-}{a_{ij}})(.)(\alpha_j, \beta_j, \chi_j, \delta_j) = (\frac{a_j^-}{d_{ij}}.\alpha_j, \frac{b_j^-}{c_{ij}}.\beta_j, \frac{c_j^-}{b_{ij}}.\chi_j, \frac{d_j^-}{a_{ij}}.\delta_j) \end{cases}$$

رابطه اول برای حالتی است که معیار ***j*** ام جنبه مثبت دارد و دومین رابطه برای حالتی است که معیار ***j*** ام جنبه ی منفی دارد . که نتایج این محاسبات را در ماتریس v وارد کرده و این ماتریس به صورت زیر بدست می آید :

$$v = \begin{array}{c|ccccc|} & X_1 & \cdots & X_j & \cdots & X_n \\ A_1 & \tilde{v}_{11} & \cdots & \tilde{v}_{1j} & \cdots & \tilde{v}_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_i & \tilde{v}_{i1} & \cdots & \tilde{v}_{ij} & \cdots & \tilde{v}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_m & \tilde{v}_{m1} & \cdots & \tilde{v}_{mj} & \cdots & \tilde{v}_{mn} \end{array}$$

گام ۳ . بدست آوردن جواب ایده آل مثبت *(PIS)*[1] که آن را با A^{+} نشان داده وجواب ایده آل منفی *(NIS)*[2] که با A^{-} نمایش داده می شود .

- در حالت قطعی :

$$A^{+}=[v_1^{+},\ldots,v_j^{+},\ldots,v_n^{+}];\qquad v_j^{+}=\max_{i}\{v_{ij}\}$$

$$A^{-}=[v_1^{-},\ldots,v_j^{-},\ldots,v_n^{-}];\qquad v_j^{-}=\min_{i}\{v_{ij}\}$$

- در حالت فازی :

در حالت فازی جهت مقایسه ی اعداد فازی و تعیین $\tilde{v}_j^{+},\tilde{v}_j^{-}$، از فرآیندهای رتبه بندی اعداد فازی استفاده می گردد . *Chen & Hwang* از روش رتبه بندی ارائه شده توسط *Lee & Li* استفاده کرده اند . طبق این روش ، رتبه ی عدد فازی $\tilde{v}_{ij}$ که با $M(\tilde{v}_{ij})$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می گردد :

برای عدد فازی مثلثی :

$$M(v_{ij})=\frac{-a_{ij}^{2}+c_{ij}^{2}-a_{ij}.b_{ij}+c_{ij}.b_{ij}}{3(-a_{ij}+c_{ij})}$$

برای عدد فازی ذوزنقه ای :

$$M(v_{ij})=\frac{-a_{ij}^{2}-b_{ij}^{2}+c_{ij}^{2}+d_{ij}^{2}-a_{ij}.b_{ij}+c_{ij}.d_{ij}}{3(-a_{ij}-b_{ij}+c_{ij}+d_{ij})}$$

پس از بدست آوردن $M(\tilde{v}_{ij})$ ها، به ازای هر ستون *j*، $\tilde{v}_{ij}$ ای را که دارای بیشترین مقدار $M(\tilde{v}_{ij})$ است به عنوان $\tilde{v}_j^{+}$ و $\tilde{v}_{ij}$ ای را که دارای کمترین مقدار $M(\tilde{v}_{ij})$ است به عنوان $\tilde{v}_j^{-}$ معرفی می کنیم .

گام ۴ . بدست آوردن اندازه ی فاصله ی هر گزینه نسبت به ایده آل مثبت و منفی (S_i^{+},S_i^{-}) .

- در حالت قطعی :

برای بدست آوردن فاصله ی هر گزینه ی از ایده آل های مثبت و منفی، دو روش وجود دارد : روش اقلیدسی و روش بلوکی[2] . در اینجا رابطه مربوط به روش بلوکی بیان می گردد :

$S_i^{+}=\sum_{j=1}^{n}\left|v_{ij}-v_j^{+}\right|=\sum_{j=1}^{n}D_{ij}^{+}$: فاصله گزینه *i*ام از ایده آل مثبت

$S_i^{-}=\sum_{j=1}^{n}\left|v_{ij}-v-\right|=\sum_{j=1}^{n}D_{ij}^{-}$: فاصله گزینه*i*ام از ایده آل منفی

- در حالت فازی :

برای داده های فازی، فاصله ی بین دو عدد فازی بر طبق تعریف *Zadeh* به صورت زیر محاسبه می گردد :

---

[1] .Positive Ideal Solution

[2] .Negetive Ideal Solution

$$D_{ij}^+ = 1 - \sup_x \{\min[\mu_{v_{ij}}(x), \mu_{v_j^+}(x)]\}$$

$$D_{ij}^- = 1 - \sup_x \{\min[\mu_{v_{ij}}(x), \mu_{v_j^-}(x)]\}$$

که این رابطه برای اعداد فازی مثلثی به صورت زیر قابل تعمیم است :

(چنانچه $v_j^+ = (a^+, b^+, c^+), v_j^- = (a^-, b^-, c^-)$ باشند)

$$D_{ij}^+ = \begin{cases} 1 - \dfrac{c_{ij} - a^+}{b^+ + c_{ij} - a^+ - b_{ij}} & for(b_{ij} < b^+) \\ 1 - \dfrac{c^+ - a_{ij}}{b_{ij} + c^+ - a_{ij} - b^+} & for(b^+ < b_{ij}) \end{cases}$$

$$D_{ij}^- = \begin{cases} 1 - \dfrac{c^- - a_{ij}}{b_{ij} + c^- - a_{ij} - b^-} & for(b^- < b_{ij}) \\ 1 - \dfrac{c_{ij} - a^-}{b^- + c_{ij} - a^- - b_{ij}} & for(b_{ij} < b^-) \end{cases}$$

قابل ذکر است که D_{ij}^+, D_{ij}^- ، اعداد قطعی هستند .

فاصله گزینه *i*ام از ایده آل مثبت : $S_i^+ = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}^+$

فاصله گزینه*i*ام از ایده آل منفی : $S_i^- = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}^-$

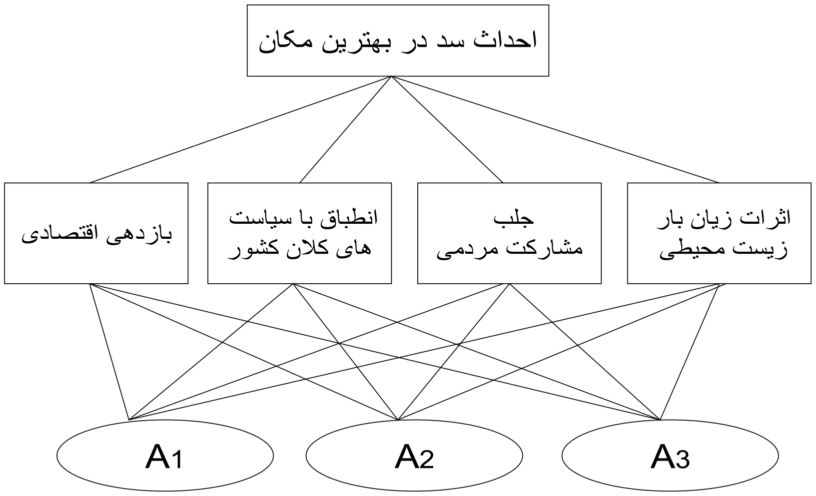
گام ۵ . محاسبه ی نزدیکی نسبی هر گزینه به ایده آل ها (C_i^+). این شاخص را جهت ترکیب کردن مقادیر S_i^+, S_i^- و در نتیجه مقایسه ی گزینه ها نسبت به هم تعریف می کنیم . که با رابطه زیر قابل محاسبه است :

$$C_i^+ = \frac{S_i^+}{S_i^+ + S_i^-}$$

گام ۶ . رتبه بندی گزینه ها . بر اساس ترتیب نزولی C_i^+ ها، می توان گزینه ها را رتبه بندی نمود .

۳.۳ . بررسی یک مثال عددی

سه گزینه ی مختلف برای احداث یک سد بر روی یک رودخانه پیشنهاد شده است . شخص تصمیم گیرنده می خواهد براساس چهار معیار بازدهی سرمایه X_1 ، انطباق با سیاست های کلان کشور X_2 ، جلب مشارکت مردمی X_3 و اثرات زیان بار زیست محیطی X_4 ، یکی از سه گزینه را انتخاب نماید . ساختار سلسله مراتبی این تصمیم گیری، در شکل ۹ نمایش داده شده است .



شکل ۹ . ساختار سلسله مراتبی انتخاب بهترین مکان برای احداث سد

ماتریس تصمیم گیری به صورت زیر ارائه شده است :

$$D=\begin{array}{c}\\ A_1\\ A_2\\ A_3\end{array}\begin{array}{cccc}X_1 & X_2 & X_3 & X_4\\ \text{تاحدودی کم} & \text{زیاد} & \text{تاحدودی زیاد} & \text{مناسب}\\ \text{بسیار زیاد} & \text{مناسب} & \text{زیاد} & \text{تاحدودی زیاد}\\ \text{مناسب} & \text{کم} & \text{بسیار زیاد} & \text{تاحدودی کم}\end{array}$$

و همچنین شخص تصمیم گیرنده، بردار وزن شاخص ها را به صورت زیر در نظر گرفته است :

$$W=\left(\begin{array}{cccc}\tilde{w}_1 & \tilde{w}_2 & \tilde{w}_3 & \tilde{w}_4\\ \text{بسیار با اهمیت} & \text{تا حدودی با اهمیت} & \text{تا حدودی کم اهمیت} & \text{بی تفاوت}\end{array}\right)$$

برای تشکیل ماتریس تصمیم گیری فازی و بردار وزن فازی جداول مختلفی وجود دارد که یک نمونه از آن ها ، جدول های ۴ و ۵ هستند.

جدول 4. امتیازدهی به گزینه ها

(۰و۰و۱)	بسیار کم
(۰و۱و۳)	کم
(۱و۳و۵)	تا حدودی کم
(۳و۵و۷)	مناسب
(۵و۷و۹)	تا حدودی زیاد
(۷و۹و۱۰)	زیاد
(۹و۱۰و۱۰)	بسیار زیاد

جدول ۵ . درجه اهمیت شاخص ها

(۰و۰و۰.۱)	بسیار کم اهمیت
(۰و۰.۱و۰.۳)	کم اهمیت
(۰.۱و۰.۳و۰.۵)	تا حدودی کم اهمیت
(۰.۳و۰.۵و۰.۷)	بی تفاوت
(۰.۵و۰.۷و۰.۹)	تا حدودی با اهمیت
(۰.۷و۰.۹و۱)	با اهمیت
(۰.۹و۱و۱)	بسیار با اهمیت

بنابراین با استفاده از این دو جدول، اعداد فازی را در ماتریس تصمیم گیری و بردار وزن قرار داده و مراحل الگوریتم *TOPSIS* فازی را انجام می دهیم :

$$D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \begin{bmatrix} (1,3,5) & (7,9,10) & (5,7,9) & (3,5,7) \\ (9,10,10) & (3,5,7) & (7,9,10) & (5,7,9) \\ (3,5,7) & (0,1,3) & (9,10,10) & (1,3,5) \end{bmatrix}$$

$$W = (\overset{\tilde{w}_1}{(0.9,1,1)} \quad \overset{\tilde{w}_2}{(0.5,0.7,0.9)} \quad \overset{\tilde{w}_3}{(0.1,0.3,0.5)} \quad \overset{\tilde{w}_4}{(0.3,0.5,0.7)})$$

گام ۱ . نرمالیزه کردن ماتریس تصمیم .

	J=1	*J=2*	*J=3*	*J=4*
$\tilde{x}_j^+$	(۹و۱۰و۱۰)	(۷و۹و۱۰)	(۹و۱۰و۱۰)	(۵و۷و۹)
$\tilde{x}_j^-$	(۱و۳و۵)	(۰و۱و۳)	(۵و۷و۹)	(۱و۳و۵)

X_1, X_2, X_3 معیارهایی هستند که جنبه ی مثبت دارند، بنابراین r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} را از رابطه $\tilde{x}_{ij} (/) \tilde{x}_j^+$ محاسبه می کنیم ($\tilde{x}_1^+, \tilde{x}_2^+, \tilde{x}_3^+$ ها در جدول بالا در خانه های طوسی رنگ نشان داده شده اند) . X_4 معیاری است که دارای جنبه منفی است، بنابراین r_{i4} را از رابطه $\tilde{x}_j^- (/) \tilde{x}_{ij}$ محاسبه می کنیم ($\tilde{x}_4^-$ در جدول بالا در خانه زرد رنگ نشان داده شده است). محاسبه چند نمونه از این درایه ها در زیر آمده است :

$$\tilde{r}_{11} = \tilde{x}_{11}(/)\tilde{x}_1^+ = (\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{5}{9}) = (0.1,0.3,0.56)$$

$$\tilde{r}_{31} = \tilde{x}_{31}(/)\tilde{x}_1^+ = (\frac{3}{10},\frac{5}{10},\frac{7}{9}) = (0.3,0.5,0.78)$$

$$\tilde{r}_{23} = \tilde{x}_{23}(/)\tilde{x}_3^+ = (\frac{7}{10},\frac{9}{10},\frac{10}{9}) = (0.7,0.9,1.11)$$

$$\tilde{r}_{24} = \tilde{x}_4^-(/)\tilde{x}24 = (\frac{1}{9},\frac{3}{7},\frac{5}{5}) = (0.11,0.43,1)$$

$$\vdots$$

بنابراین ماتریس نرمالیزه شده تصمیم عبارت است از :

$$D' = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (0.1,0.3,0.56) & (0.7,1,1.43) & (0.5,0.7,1) & (0.15,0.6,0.71) \\ (0.9,1,1.11) & (0.3,0.56,1) & (0.7,0.9,1.11) & (0.11,0.43,1) \\ (0.3,0.5,0.78) & (0,0.11,0.43) & (0.9,1,1.11) & (0.2,1,5) \end{bmatrix} \end{array}$$

گام ۲ . بدست آوردن ماتریس نرمالیزه شده ی وزن دار .

محاسبه چند نمونه از درایه های این ماتریس ، در زیر نشان داده شده است :

$$\tilde{v}_{11} = \tilde{r}_{11}(.)\tilde{w}_1 = (0.1,0.3,0.56)(.)(0.9,1,1) = (0.09,0.3,0.56)$$

$$\tilde{v}_{32} = \tilde{r}_{32}(.)\tilde{w}_2 = (0,0.11,0.43)(.)(0.5,0.7,0.9) = (0,0.077,0.387)$$

$$\tilde{v}_{14} = \tilde{r}_{14}(.)\tilde{w}_4 = (0.15,0.6,0.71)(.)(0.3,0.5,0.7) = (0.045,0.3,0.497)$$

$$\vdots$$

بنابراین ماتریس تصمیم ِ نرمالیزه شده ی وزن دارعبارت است از :

$$v = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (0.09,0.3,0.56) & (0.35,0.7,1.287) & (0.05,0.21,0.5) & (0.045,0.3,0.497) \\ (0.81,1,1.11) & (0.15,0.392,0.9) & (0.07,0.27,0.56) & (0.033,0.215,0.7) \\ (0.27,0.5,0.78) & (0,0.077,0.387) & (0.09,0.3,0.56) & (0.06,0.5,3.5) \end{bmatrix} \end{array}$$

گام ۳ . بدست آوردن جواب ایده آل مثبت که آن را با A^+ نشان داده وجواب ایده آل منفی که با A^- نمایش داده می شود .

در ابتدا باید $M(\tilde{v}_{ij})$ ها را محاسبه کرد . محاسبه چند نمونه از این مقادیر در زیر نشان داده شده است :

$$M(\tilde{v}_{21}) = \frac{-0.81*1 - 0.81^2 + 1.11^2 + 1*1.11}{3(1.11-0.81)} = 0.973$$

$$M(\tilde{v}_{34}) = \frac{-0.06*0.5 - 0.06^2 + 3.5^2 + 3.5*0.5}{3(3.5-0.06)} = 1.353$$

$$\vdots$$

M=

٠.٢٨١	٠.٢٥٣	٠.٧٧٩	٠.٣١٧
٠.٣١٦	٠.٣	٠.٤٨١	٠.٩٧٣
١.٣٥٣	٠.٣١٧	٠.١٥٥	٠.٥١٧

(خانه های طوسی رنگ نشان دهنده ی بزرگترین رتبه ی هر ستون و خانه های زرد رنگ نشان دهنده ی کوچکترین رتبه ی هر ستون است .) بنابراین ایده آل مثبت و منفی به صورت زیر هستند :

$$A^+ = [\overset{v_1^+}{(0.81,1,1.11)}, \overset{v_2^+}{(0.35,0.7,1.287)}, \overset{v_3^+}{(0.09,0.3,0.56)}, \overset{v_4^+}{(0.06,0.5,3.5)}]$$

$$A^- = [\overset{v_1^-}{(0.09,0.3,0.56)}, \overset{v_2^-}{(0,0.077,0.387)}, \overset{v_3^-}{(0.05,0.21,0.5)}, \overset{v_4^-}{(0.045,0.3,0.497)}]$$

گام ۴ . بدست آوردن اندازه ی فاصله ی هر گزینه نسبت به ایده آل مثبت و منفی (S_i^+, S_i^-) .

$$\left.\begin{array}{r}\widetilde{v}_1^+ = (0.81,1,1.11)\\ \widetilde{v}_{11} = (0.09,0.3,0.56)\end{array}\right\} \Rightarrow D_{11}^+ = 1 - \frac{0.56-0.81}{1+0.56-0.81-0.3} = 1.56$$

$$\left.\begin{array}{r}\widetilde{v}_4^+ = (0.06,0.5,3.5)\\ \widetilde{v}_{24} = (0.033,0.215,0.7)\end{array}\right\} \Rightarrow D_{24}^+ = 1 - \frac{0.7-0.06}{0.5+0.7-0.06-0.215} = 0.308$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$D^+ = \begin{bmatrix} 1.56 & 0 & 0.18 & 0.314 \\ 0 & 0.35 & 0.06 & 0.308 \\ 1.063 & 0.944 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}\widetilde{v}_1^- = (0.09,0.3,0.56)\\ \widetilde{v}_{21} = (0.81,1,1.11)\end{array}\right\} \Rightarrow D_{21}^- = 1 - \frac{0.56-0.81}{1+0.56-0.81-0.3} = 1.56$$

$$\left.\begin{array}{r}\widetilde{v}_3^- = (0.05,0.2,0.5)\\ \widetilde{v}_{33} = (0.09,0.3,0.56)\end{array}\right\} \Rightarrow D_{33}^- = 1 - \frac{0.5-0.09}{0.3+0.5-0.09-0.21} = 0.18$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$D^- = \begin{bmatrix} 0 & 0.945 & 0 & 0 \\ 1.56 & 0.571 & 0.122 & 0.115 \\ 0.408 & 0 & 0.18 & 0.314 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} S_1^+ = 1.56 + 0.00 + 0.18 + 0.314 = 2.054 \\ S_2^+ = 0.00 + 0.359 + 0.06 + 0.308 = 0.727 \\ S_3^+ = 1.063 + 0.944 + 0.00 + 0.00 = 2.007 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1^- = 0.00 + 0.945 + 0.00 + 0.00 = 0.945 \\ S_2^- = 1.56 + 0.571 + 0.122 + 0.115 = 2.368 \\ S_3^- = 0.408 + 0.00 + 0.18 + 0.314 = 0.902 \end{cases}$$

گام ۵ . محاسبه ی نزدیکی نسبی هر گزینه به ایده آل ها (C_i^+) .

$$C_1^+ = \frac{S_1^-}{S_1^- + S_1^+} = \frac{0.945}{0.945 + 2.054} = 0.315$$

$$C_2^+ = \frac{S_2^-}{S_2^- + S_2^+} = \frac{2.368}{2.368 + 0.727} = 0.765$$

$$C_3^+ = \frac{S_3^-}{S_3^- + S_3^+} = \frac{0.902}{0.902 + 2.007} = 0.310$$

گام ۶ . رتبه بندی گزینه ها .

$$A_2 > A_1 > A_3$$

۴ . *TOPSIS* فازیِ سلسله مراتبی[1]

در بخش ۳ به تشریح الگوریتم *TOPSIS* کلاسیک و فازی پرداختیم . در روش *TOPSIS* کلاسیک و فازی ، ما تعدادی معیار اصلی و تعدادی گزینه داشتیم و سلسله مراتبی مسائل دارای سه سطح بود: سطح هدف، سطح معیارهای اصلی و سطح گزینه ها . و هدفمان رتبه بندیِ این گزینه ها بر اساس معیارها بود . چنانچه ساختار سلسله مراتبی مساله دارای زیر معیار نیز باشد (به عبارت دیگر بیش از سه سطح داشته باشیم)، روش های *TOPSIS* کلاسیک و فازی قابل استفاده نخواهند بود به همین دلیل در این بخش روش *TOPSIS* فازی را توسعه داده و روش جدیدی تحت عنوان روش *TOPSIS* فازیِ سلسله مراتبی [1]را ارائه خواهیم داد .

مساله ای را در نظر بگیرید که دارای *n* معیار اصلی، *m* زیر معیار، *k* گزینه و *s* قضاوت کننده است .

هر معیار اصلی دارای r_i زیر معیار است که تعداد کل این زیر معیارها برابر *m* است $(m = \sum_{i=1}^{n} r_i)$.

شکل۱۰ ، ساختار سلسله مراتبی این مساله را نشان می دهد .

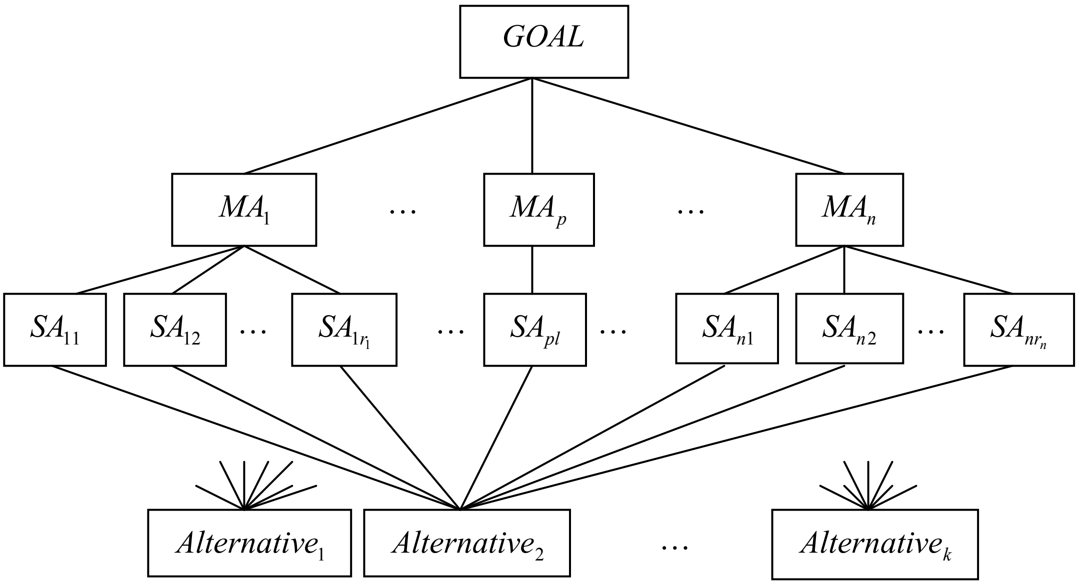
برای ساختار سلسله مراتبی شکل۱۰ که دارای چهار سطح هدف، معیار اصلی ، زیرمعیار و گزینه ها است ، سه نوع ماتریس وزن باید وجود داشته باشد :

- ماتریس(بردار) وزنِ معیارهای اصلی مساله نسبت به هدف که با $\tilde{T}_{MA}$ نشان داده می شود ؛

---

[1] .Hierarchical Fazzy TOPSIS Method

- ماتریس وزنِ زیر معیارها نسبت به معیارهای مربوطه ی خود که با $\tilde{I}_{SA}$ نشان داده می شود؛
- ماتریس وزنِ گزینه ها نسبت به زیرمعیارها که با $\tilde{I}_{A}$ نشان داده می شود .



شکل ۱۰ . ساختار سلسله مراتبی مساله ای که دارای چهار سطح است

الگوریتم *TOPSIS* فازیِ سلسله مراتبی به شرح زیر است :

در ابتدا سه ماتریس مذکور را تشکیل می دهیم :

اولین ماتریس، ماتریس وزن معیارهای اصلی نسبت به هدف است که با $\tilde{I}_{MA}$ نشان داده می شود و بصورت زیر است :

$$\tilde{I}_{MA} = \begin{array}{c} \\ MA_1 \\ MA_2 \\ \vdots \\ MA_p \\ \vdots \\ MA_n \end{array} \begin{array}{c} Goal \\ \left[\begin{array}{c} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \vdots \\ \tilde{w}_p \\ \vdots \\ \tilde{w}_n \end{array}\right] \end{array}$$

که $\tilde{w}_p$ ، میانگین وزن های تخصیص داده شده به معیار اصلی *p*، توسط قضاوت کننده ها است و از رابطه ی زیر دست می آید :

$$\tilde{w}_p = \frac{\sum_{i=1}^{s} \tilde{q}_{pi}}{s} \qquad p = 1,2,...n$$

و $\tilde{q}_{pi}$ مبینِ عدد فازی متناظر با قضاوتِ قضاوت کننده ی *i* ام برای وزن معار *p* ام نسبت به هدف است .

دومین ماتریس، ماتریس وزن زیرمعیارها نسبت به معیارهای مربوطه است که آن را با $\tilde{I}_{SA}$ نمایش داده می شود و به صورت زیر است . برای نمایش این ماتریس، بردار وزن بدست آمده از $\tilde{I}_{MA}$ را در بالای این ماتریس، قرار می دهیم :

$$\tilde{I}_{SA} = \begin{array}{c|cccccc|} & \overset{\tilde{w}_1}{MA_1} & \overset{\tilde{w}_2}{MA_2} & \ldots & \overset{\tilde{w}_p}{MA_p} & \ldots & \overset{\tilde{w}_n}{MA_n} \\ SA_{11} & \tilde{w}_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ SA_{12} & \tilde{w}_{12} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ SA_{1r_1} & \tilde{w}_{1r_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ SA_{21} & 0 & \tilde{w}_{21} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ SA_{22} & 0 & \tilde{w}_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ SA_{2r_2} & 0 & \tilde{w}_{2r_2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ SA_{pl} & 0 & 0 & \cdots & \tilde{w}_{pl} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ SA_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{w}_{n1} \\ SA_{n2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{w}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ SA_{nr_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{w}_{nr_n} \end{array}$$

که $\tilde{w}_{pl}$ ، میانگین وزن های بدست آمده توسط قضاوت کننده ها است و از رابطه ی زیر دست می آید :

$$\tilde{w}_{pl} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \tilde{q}_{pl_i}}{s} \qquad p = 1,2,...n$$

و $\tilde{q}_{pl_i}$ مبینِ عدد فازی متناظر با قضاوتِ قضاوت کننده ی iام برای وزن زیرمعار l ام نسب به معیارp، است .

سومین ماتریس ، ماتریس امتیاز گزینه ها نسبت به زیرمعیارهاست که با $\tilde{I}_A$ نمایش داده شده و به صورت زیر بیان می گردد . برای نمایش این ماتریس، بردار وزن بدست آمده از $\tilde{I}_{SA}$ را در بالای این ماتریس، قرار می دهیم :

$$\widetilde{I}_A = \begin{array}{c|ccccccccc} & \overset{\widetilde{W}_{11}}{SA_{11}} & \overset{\widetilde{W}_{12}}{SA_{12}} & \cdots & \overset{\widetilde{W}_{1r_1}}{SA_{1r_1}} & \cdots & \overset{\widetilde{W}_{pl}}{SA_{pl}} & \cdots & \overset{\widetilde{W}_{nr_n}}{SA_{nr_n}} \\ \hline A_1 & \widetilde{c}_{111} & \widetilde{c}_{112} & \cdots & \widetilde{c}_{11r_1} & \cdots & \widetilde{c}_{1pl} & \cdots & \widetilde{c}_{1nr_n} \\ A_2 & \widetilde{c}_{211} & \widetilde{c}_{212} & \cdots & \widetilde{c}_{21r_1} & \cdots & \widetilde{c}_{2pl} & \cdots & \widetilde{c}_{2nr_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_q & \widetilde{c}_{q11} & \widetilde{c}_{q12} & \cdots & \widetilde{c}_{q1r_1} & \cdots & \widetilde{c}_{qpl} & & \widetilde{c}_{qnr_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_k & \widetilde{c}_{k11} & \widetilde{c}_{k12} & \cdots & \widetilde{c}_{k1r_1} & \cdots & \widetilde{c}_{kpl} & \cdots & \widetilde{c}_{knr_n} \end{array}$$

که $\widetilde{W}_{pl} = \widetilde{w}_p . \widetilde{w}_{pl}$.

در این ماتریس، مقادیر فازی $\widetilde{c}_{qpl}$ ، میانگین امتیازهایی است که بوسیله قضاوت کننده ها داده شده است و از رابطه زیر بدست می آید :

$$\widetilde{c}_{qpl} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \widetilde{q}_{qpl_i}}{s} \qquad p = 1,2,\ldots n$$

و $\widetilde{q}_{qpl_i}$ ،مبینِ عدد فازی متناظر با قضاوتِ قضاوت کننده ی *i*ام برای وزن گزینه *q*ام نسبت به زیرمعار *l* ام ِ معیار*p*،است .

جهت تعیین درجه اهمیت هر معیار اصلی نسبت به هدف و همچنین هر زیرمعیار نسبت به معیار اصلی، می توان از جدول۶ و برای تعیین امتیاز(اهمیت) گزینه ها نسبت به زیرمعیارها، می توان از جدول ۷ استفاده کرد[1] .

پس از اینکه این سه ماتریس بدست آمد، می توان از الگوریتم*TOPSIS* فازی ارائه شده در قسمت ۳.۲ استفاده کرده و رتبه بندی گزینه ها را بدست آورد .

جدول ۶ . درجه اهمیت هر معیار اصلی نسبت به هدف و
درجه اهمیت هر زیرمعیار نسبت به معیار اصلی

خیلی کم	(0,0,0.2)
کم	(0,0.2,0.4)
متوسط	(0.3,0.5,0.7)
زیاد	(0.6,0.8,1)
خیلی زیاد	(0.8,1,1)

جدول۷ . امتیاز (اهمیت) گزینه ها نسبت به زیرمعیارها

خیلی ضعیف	(0,0,20)
ضعیف	(0,20,40)
بی تفاوت	(30,50,70)
خوب	(60,80,100)
خیلی خوب	(80,100,100)

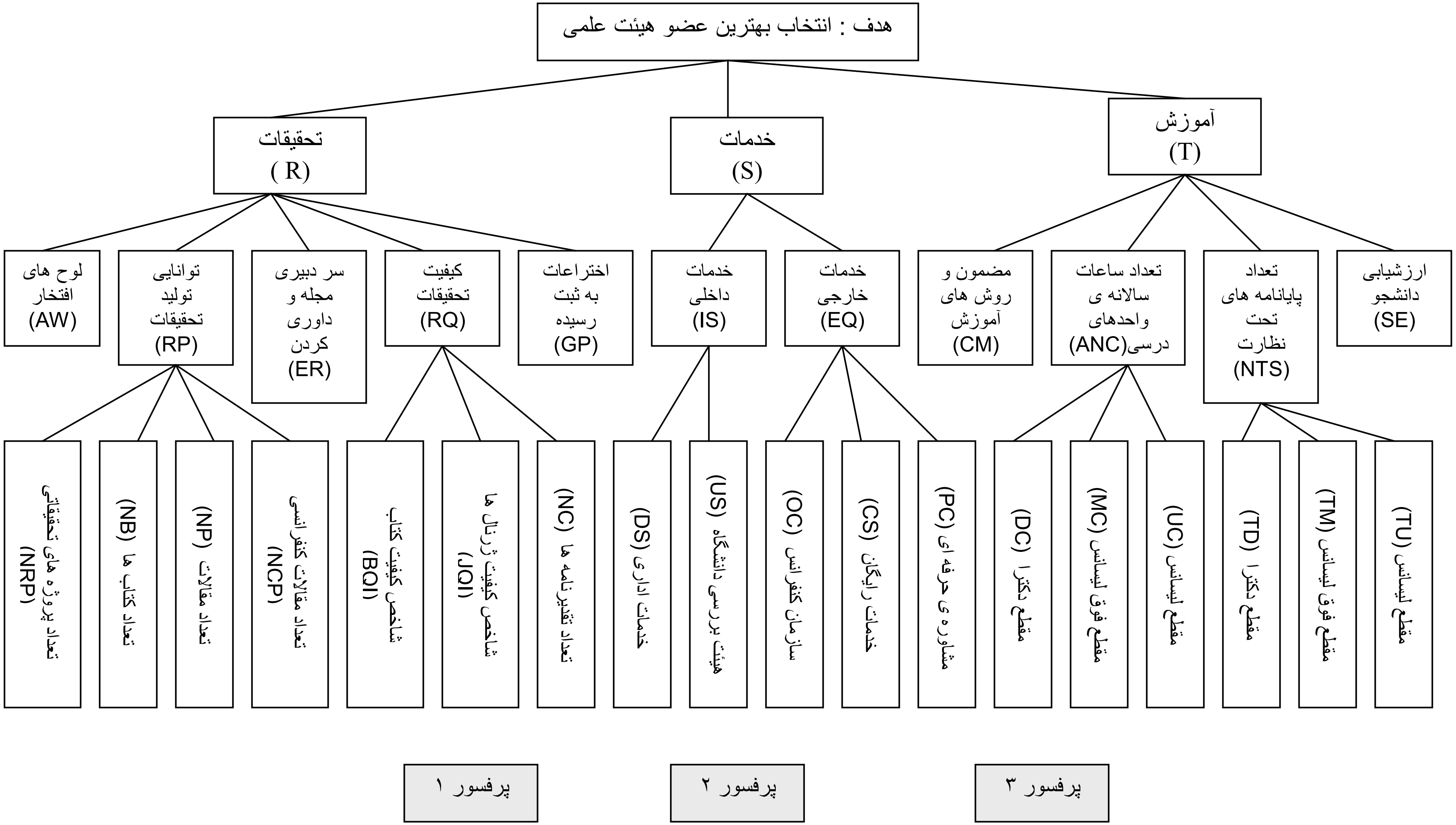
۵. استفاده از AHP فازی و TOPSIS فازیِ سلسله مراتبی در یک دپارتمان مهندسی

مساله ی ارزشیابیِ عملکرد هیئت علمی، یک مساله ی بسیار حساس و حائز اهمیت است که دارای جنبه های کمی و کیفی متفاوتی است . عملکرد هیئت علمی یک دانشگاه هم برای دانشجویان حائز اهمیت است و هم دانشکده . به همین دلیل ، عملکرد آن ها باید مورد ارزشیابی قرار گیرد . در مقالات متفاوت ، ممکن است از روش های مختلفی برای این منظور استفاده گردد. در این تحقیق از دو روش *AHP* فازی و *TOPSIS* فازیِ سلسله مراتبی جهت ارزیابی سه پرفسور در دپارتمان مهندسی یکی از دانشگاه های ترکیه، استفاده می گردد[1] و روش جدیدِ *TOPSIS* فازیِ سلسله مراتبی با *AHP* فازی، مورد مقایسه قرار می گیرد[1] .

هدف، ارزیابی سه پرفسور در دپارتمان مهندسی یکی از دانشگاه های ترکیه است . جهت استفاده از دو روشِ روش جدیدِ *TOPSIS* فازیِ سلسله مراتبی و*AHP* فازی ، ابتدا سلسله مراتبی این تصمیم گیری مشخص می گردد . شکل ۱۱ ساختار سلسله مراتبی این تصمیم گیری را نشان می دهد .

معیارهای اصلی ارزیابی این سه پرفسور سه دسته هستند : معیار آموزش ، معیار تحقیقات و معیارخدمات . هر یک از این معیارهای اصلی دارای زیر معیارهایی نیز هستند که در شکل ۱۱ به طور کامل نشان داده است .

جهت استفاده از این دو روش ، دو سری پرسشنامه تهیه گردیده و به ۱۵۰ نفر از اساتید دانشگاه های مختلفِ ترکیه فرستاده شده است . پس از تکمیل این پرسشنامه ها وجمع آوری این داده ها، از دو روشِ مذکور جهت ارزیابی سه پرفسور استفاده شده است .



شکل ۱۱. ساختار سلسله مراتبی ارزیابی سه پرفسور در دپارتمان مهندسی یکی از دانشگاه های ترکیه

۱.۵. نتایج حاصل از به کارگیری *AHP* فازی

با استفاده از روش *AHP* فازی به روش آنالیز توسعه Chang، یک بردار ویژه برای وزن معیارهای اصلی نسبت به هدف، ۳ بردار ویژه برای وزن زیر معیارها نسبت به معیارهای اصلی شان ، ۶ بردار ویژه برای وزن زیر معیارهای زیرمعیارها نسبت به زیرمعیارهایشان و ۲۳ بردار ویژه برای وزن گزینه ها نسبت به زیرمعیارها و زیرمعیارهای زیرمعیارها، بدست آمده است . جدول های ۸،۹،۱۰و ۱۱، یک نمونه از ماتریس های مقایسات زوجی هر سطح را نشان می دهد .

جدول ۸ . ماتریس مقایسه زوجی معیارهای اصلی نسبت به" هدف"

خدمات(S)	آموزش(T)	تحقیقات(R)	هدف
(1.651,1.817,2.321)	(0.63,1.145,1.651)	(1,1,1)	تحقیقات(R)
(1.31,1.587,1.842)	(1,1,1)	(0.606,0.874,1.587)	آموزش(T)
(1,1,1)	(0.543,0.63,0.763)	(0.606,0.874,1.587)	خدمات(S)

$$S_R = (3.28,3.96,4.97) \otimes (\frac{1}{12.57}, \frac{1}{9.93}, \frac{1}{8.35}) = (0.257,0.399,0.596)$$

$$S_T = (2.92,3.46,4.43) \otimes (\frac{1}{12.57}, \frac{1}{9.93}, \frac{1}{8.35}) = (0.229,0.349,0.5314)$$

$$S_S = (2.15,2.50,3.35) \otimes (\frac{1}{12.57}, \frac{1}{9.93}, \frac{1}{8.35}) = (0.168,0.252,0.401)$$

$$V(S_R \geq S_S) = 1.00$$

$$V(S_S \geq S_R) = 0.50$$

$$\vdots$$

وزن بدست آمده از این ماتریس مقایسه زوجی به صورت زیر است که نشان دهنده ی وزن معیارهای اصلی نسبت به هدف است .

$$W_G = (0.43,0.36,0.21)^T$$

جدول ۹. ماتریس مقایسه زوجی زیرمعیارهای زیر معیار " توانایی تولید تحقیقات" نسبت به زیرمعیار "توانایی تولید تحقیقات"

NCP	NB	NP	NRP	توانایی تولید تحقیقات(RP)
(1.18,1.65,2.4)	(0.69,1,1.58)	(0.6,0.87,1.58)	(1,1,1)	NRP
(1.81,2.32,2.82)	(0.43,0.56,0.79)	(1,1,1)	(0.6,1.41,1.65)	NP
(1.14,1.71,2.24)	(1,1,1)	(1.26,1.77,2.28)	(0.63,1,1.44)	NB
(1,1,1)	(0.44,0.58,0.87)	(0.35,0.43,0.5)	(0.51,0.6,0.84)	NCP

وزن بدست آمده از این ماتریس مقایسه زوجی به صورت زیر است که نشان دهنده ی وزن زیرمعیارهای معیار توانای تولید تحقیقات نسبت به زیرمعیارتوانایی تولید تحقیقات است:

$$W_{RP} = (0.28,0.30,0.33,0.09)^T$$

جدول ۱۰ . ماتریس مقایسه زوجی زیرمعیارهایِ معیار "تحقیقات" نسبت به معیار "تحقیقات"

تحقیقات(R)	RP	AW	GP	RQ	ER
RP	(1,1,1)	(0.9,1.44,1.95)	(0.63,1,1.31)	(0.79,1,1.14)	(1.14,1.65,2.15)
AW	(0.51,0.69,1.1)	(1,1,1)	(0.63,1,1.31)	(0.69,0.87,1.26)	(0.63,1,1.31)
GP	(0.76,1,1.58)	(0.76,1,1.58)	(1,1,1)	(0.87,1.31,2)	(1.41,1.71,2.24)
RQ	(0.87,1,1.26)	(0.79,1.14,1.44)	(0.5,0.76,1.14)	(1,1,1)	(0.79,1.31,1.81)
ER	(0.76,1,1.58)	(0.76,1,1.58)	(0.44,0.58,0.87)	(0.55,0.76,1.26)	(1,1,1)

وزن بدست آمده از این ماتریس مقایسه زوجی به صورت زیر است که نشان دهنده ی وزن زیرمعیارهای معیار اصلیِ تحقیقات نسبت به معیار تحقیقات است:

$$W_R = (0.23,0.17,0.23,0.20,0.17)^T$$

جدول ۱۱. ماتریس مقایسه زوجی گزینه ها نسبت به زیرمعیار " تعداد پروژه های تحقیقات"

تعداد پروژه های تحقیقاتی (NRP)	پرفسور۱	پرفسور۲	پرفسور۳
پرفسور۱	(1,1,1)	(1.145,1.71,2.24)	(1.145,1.442,1.71)
پرفسور۲	(0.446,0.585,0.874)	(1,1,1)	(1.357,1.71,2.19)
پرفسور۳	(0.585,0.693,0.874)	(0.457,0.585,0.737)	(1,1,1)

وزن بدست آمده از این ماتریس مقایسه زوجی به صورت زیر است که نشان دهنده ی وزن گزینه ها نسبت به زیرمعیارتعداد پروژه های تحقیقاتی است:

$$W_{NRP} = (0.53,0.38,0.09)^T$$

وزن های بدست آمده از همه مقایسات زوجی ، به طور کامل، در جدول ۱۲ نشان داده شده است .

جدول ۱۲ . وزنهای نسبیِ عناصر سلسله مراتبی شکل ۱۱

S					T								R										
۰.۲۱					۰.۳۶								۰.۴۳										
ES			IS		SE	NTS			CM	ANC			ER	RQ			GP	AW	RP				
۰.۵۴			۰.۴۶		۰.۱۶	۰.۲۴			۰.۲۲	۰.۳۸			۰.۱۷	۰.۲			۰.۲۳	۰.۱۷	۰.۲۳				
CS	PC	OC	UC	DS		TD	TM	TU		CD	CM	CU		BQI	JQI	NC			NCP	NB	NP	NRP	
۰.۳۵	۰.۳۳	۰.۳۲	۰.۶۶	۰.۳۴		۰.۵۸	۰.۲۵	۰.۱۷		۰.۳۹	۰.۳۴	۰.۲۷		۰.۳	۰.۳۶	۰.۳۴			۰.۰۹	۰.۳۳	۰.۳	۰.۲۸	
۰.۴۲	۰.۲۴	۰۴۳	۰.۳۸	۰.۲۴	۰.۳۹	۰.۳۹	۰.۳۶	۰.۳۷	۰.۴۲	۰.۳۹	۰.۳۵	۰.۲۷	۰.۶۲	۰.۴۱	۰.۴۱	۰.۴۸	۰.۳۳	۰.۴۳	۰.۴۵	۰.۴۴	۰.۵۵	۰.۵۳	پرفسور۱
۰.۳۵	۰.۴۸	۰.۲۲	۰.۳۴	۰.۳۷	۰.۳۲	۰.۳۸	۰.۳۲	۰.۳۳	۰.۳۱	۰.۳۰	۰.۲۷	۰.۳۳	۰.۲۰	۰.۳۳	۰.۲۹	۰.۲۷	۰.۳۳	۰.۳۸	۰.۲۲	۰.۳۷	۰.۲۹	۰.۳۸	پرفسور۲
۰.۲۳	۰.۲۸	۰.۳۵	۰.۲۸	۰.۳۹	۰.۲۹	۰.۲۳	۰.۳۱	۰.۳۰	۰.۲۷	۰.۳۰	۰.۳۸	۰.۳۹	۰.۱۸	۰.۲۶	۰.۳۰	۰.۲۵	۰.۳۳	۰.۱۹	۰.۳۳	۰.۱۹	۰.۱۶	۰.۰۹	پرفسور۳

جدول ۱۲، وزن های نسبی عناصر سلسله مراتبی مساله را نشان می دهد . با تلفیق این وزن ها نسبی، وزن های نهایی سه پرفسور نسبت به هدف برابر است با :

$$proffesor1 = 0.41$$
$$proffesor2 = 0.32$$
$$proffesor3 = 0.27$$

بنابراین رتبه بندی گزینه ها به قرار زیر است :

پرفسور ۳ < پرفسور ۲< پرفسور ۱

۲ .۵. نتایج حاصل از به کارگیری TOPSIS فازی سلسله مراتبی

با توجه به ساختار سلسله مراتبی مساله که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، ۳معیار اصلی، ۱۱ زیرمعیار، ۱۸ زیرمعیار زیرمعیار، و ۳ گزینه وجود دارد . با جمع آوری داده های حاصل از پرسشنامه ها، ماتریس های $\tilde{I}_{MA},\tilde{I}_{SA},\tilde{I}_{SSA},\tilde{I}_{A}$ بدست آمده اند که دو ماتریس $\tilde{I}_{MA},\tilde{I}_{SA}$ در زیر نشان داده شده اند .

$Matrix\ \ \tilde{I}_{MA}:$

$$\tilde{I}_{MA} = \begin{array}{c} \\ R \\ T \\ S \end{array} \begin{array}{c} Goal \\ \begin{bmatrix} (0.26,0.42,0.57) \\ (0.29,0.38,0.49) \\ (0.06,0.23,0.36) \end{bmatrix} \end{array}$$

$Matrix\ \ \tilde{I}_{SA}:$

$$\tilde{I}_{SA} = \begin{array}{c|ccc|} & R & T & S \\ RP & (0.11,0.22,0.38) & 0 & 0 \\ AW & (0.09,0.18,0.29) & 0 & 0 \\ GP & (0.10,0.26,0.37) & 0 & 0 \\ RQ & (0.08,0.18,0.3) & 0 & 0 \\ ER & (0.07,0.15,0.27) & 0 & 0 \\ ANC & 0 & (0.26,0.35,0.43) & 0 \\ CM & 0 & (0.12,0.23,0.35) & 0 \\ NTS & 0 & (0.05,0.25,0.39) & 0 \\ SE & 0 & (0.09,0.22,0.41) & 0 \\ IS & 0 & 0 & (0.28,0.45,0.56) \\ ES & 0 & 0 & (0.25,0.55,0.80) \end{array}$$

جدول ۱۳نتایج حاصل از به کارگیری روش *TOPSIS*فازی سلسله مراتبی را برای این مساله نشان می دهد . در این جدول مقادیر فاصله ی نزدیکی هر یک از گزینه ها به جواب های ایده آل و همچنین مقدار نزدیکی نسبی آن ها نشان داده شده است .

جدول ۱۳ . مقادیر فاصله ی نزدیکی گزینه ها به جواب های ایده آل و مقادیر نزدیکی نسبی آن ها

Normalized C_i	C_i	S_i^-	S_i^+	
۰.۶۳	۰.۹۱۵۶۷۱۹۴۳	۱.۹۳۳۴۱۶۰۴۵	۰.۱۷۸۰۵۶۳۶۵	پرفسور۱
۰.۳۱	۰.۴۴۹۸۴۶۶۰۴۷	۰.۸۷۹۰۰۵۴۰۵	۱.۰۷۵۰۰۸۴۴۲	پرفسور۲
۰.۰۶	۰.۰۹۰۲۴۵۵۳	۰.۱۷۹۳۰۳۲	۱.۸۰۷۵۳۴۲۶۴	پرفسور۳

با توجه به نتایج بدست آمده از محاسبات، رتبه بندی گزینه ها با این روش به صورت زیر است :

پرفسور ۳ < پرفسور ۲< پرفسور ۱

۵.۳. مقایسه دو روش AHP فازی و TOPSIS فازیِ سلسله مراتبی

با کاربرد این دو روش در دپارتمان مهندسی یکی از دانشگاه های ترکیه ، که در بخش های ۵.۲ و ۵.۱ مورد بررسی قرار گرفت ، می توان تفاوت های تکنیکیِ بین این دو روش را به صورت زیر بیان نمود :

- روش*AHP* بر اساس مقایسات زوجی بنا نهاده شده است در صورتیکه روش *TOPSIS* این چنین نیست به همین دلیل،*AHP* اطلاعات بیشتری را نیاز دارد و اطلاعات بیشتری را مورد بررسی قرار می دهد .
- *TOPSIS* یک ابزار ساده تری است و تعداد سوالات مورد نیاز برای این روش، کمتر از *AHP* است .
- محاسبات روش *TOPSIS* کمتر بوده ، در نتیجه سریعتر به جواب رسیده و محاسبات آن به اندازه ی *AHP* خسته کننده نیست.
- *TOPSIS* کلاسیک نمی تواند حالتی را که مساله دارای زیر معیار است بررسی کند ولی در اینجا این روش را توسعه داده و با استفاده از روش *TOPSIS* فازی سلسله مراتبی ، به همان جوابِ حاصل از AHP رسیده ایم .

منابع :

*[1].Nufer Yasin Ates , Sezi Cevik , Cengiz Kahremman , Murat Gulbay , S.Ayca Erdogan ;**Multi Attribute Performance Evaluation Using a Hierarchial Fuzzy TOPSIS Method** ;Istanbol Technical University , Department of Industrial Enginering 34367 MackaIstanbul Turkey ,(2006).*

[2] . دکتر محمد جواد اصغرپور ، ***تصمیم گیری چند معیاره*** ، انتشارات دانشگاه تهران ، چاپ سوم ، تابستان۱۳۸۳ .

[3] . امین کوره پزان دزفولی ، ***اصول تئوری مجموعه های فازی(و کاربرد آن در مدل سازی مسائل مهندسی آب)*** ، انتشارات جهاد دانشگاهی- واحد صنعتی امیر کبیر ، چاپ اول، ۱۳۸۴ .

[4] . دکتر سید حسن قدسی پور ، ***فرآیند تحلیل سلسله مراتبی AHP*** ، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر ، چاپ سوم ، ۱۳۸۱ .

[5]. محمد علی صنیعی منفرد - سحر فیض مهدوی ، ***اندازه گیری کیفیت دانشکده های یک دانشگاه با استفاده از روش های MADM*** ، دانشگاه فنی مهندسی دانشگاه الزهرا